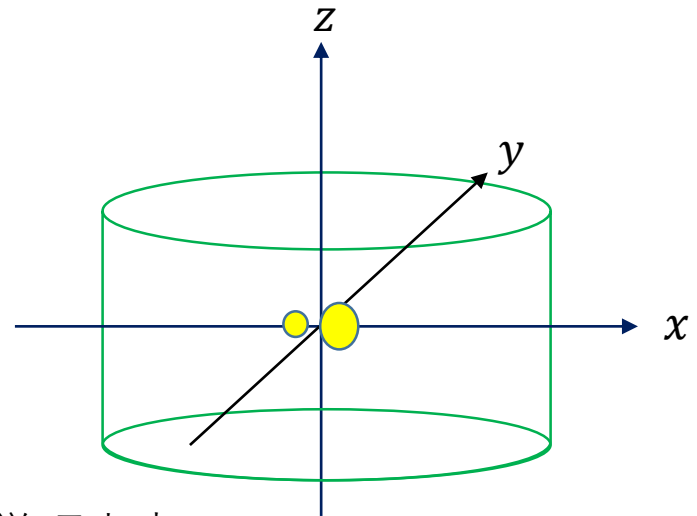


連星へのガス降着の シミュレーションでの コリオリの力の評価法の改善

$$-2\Omega \times (\rho v)$$

コリオリの力の半分は数
値流束で評価すべき。



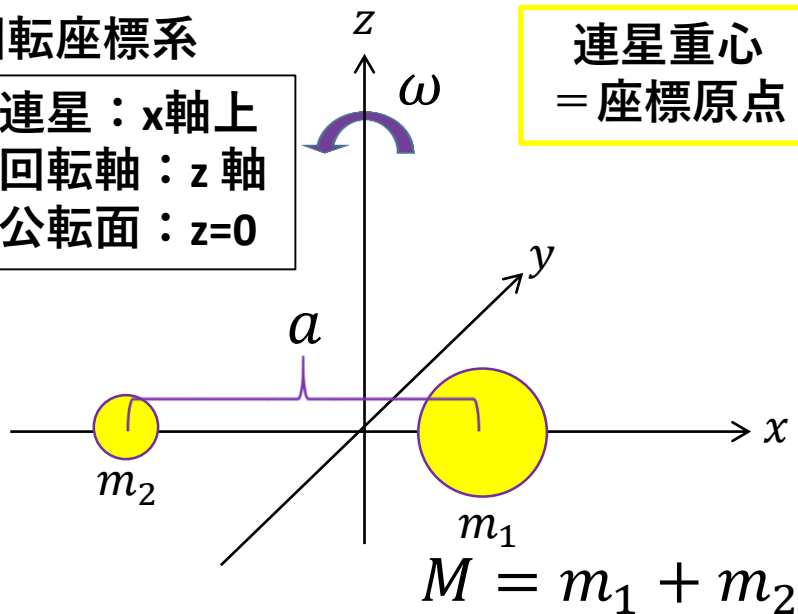
千葉大学宇宙物理学研究室
宮澤 慶次郎

共同研究者：花輪 知幸(千葉大学)、 松本 倫明(法政大学)

シミュレーションモデル①

回転座標系

- ・ 連星：x軸上
- ・ 回転軸：z軸
- ・ 公転面：z=0



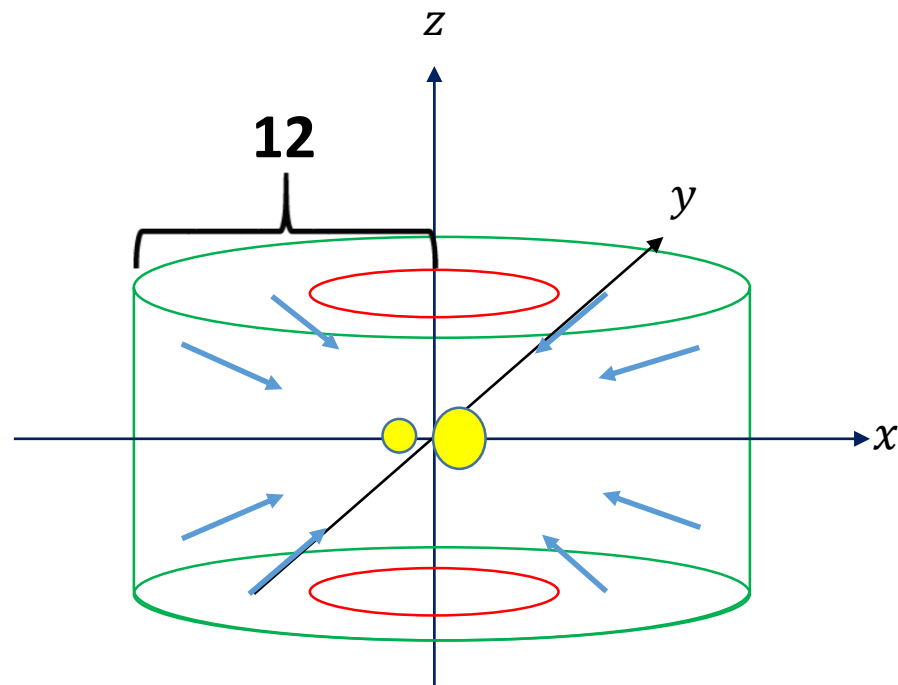
単位系

$$MG = 1, \quad \omega = 1, \quad a = 1$$

※今回の計算では磁場なし・
等温を仮定

境界条件

円柱表面からガス落下



注入するガス密度は **1**

$$\text{運動方程式：} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbf{I}) = \rho \mathbf{g} + \rho \Omega^2 \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\rho \mathbf{v})$$

問題点

原始連星周囲のガス円盤の降着
(角運動量は正しく計算出来ているか?)



慣性系の値に直して確認

比角運動量分布が**衝撃波面**で異常に増加



原因調査

コリオリ力の評価方法が原因であることを発見

コリオリ力

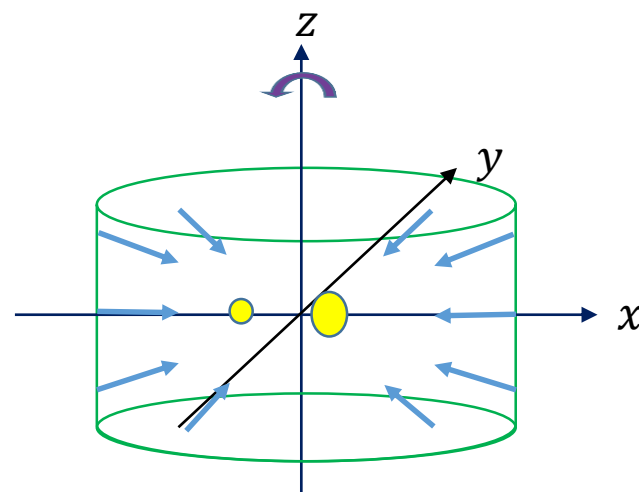
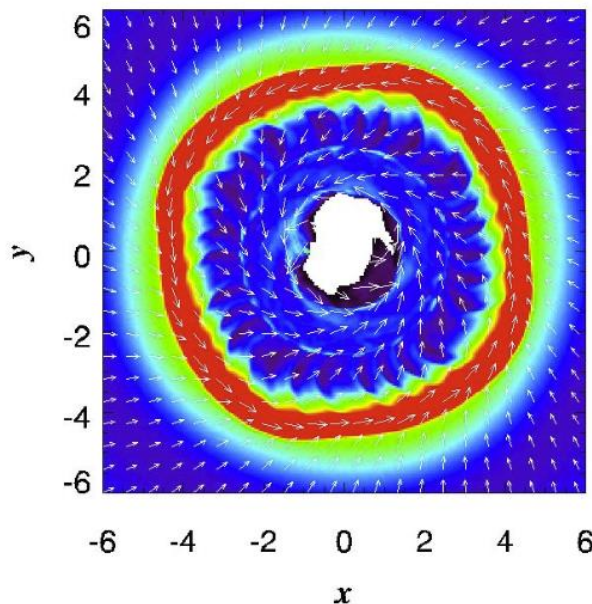
$$-2\boldsymbol{\Omega} \times (\rho \mathbf{v}) = [2\Omega \rho v_y, -2\Omega \rho v_x, 0]$$



どのように評価すべき？

比角運動量： j

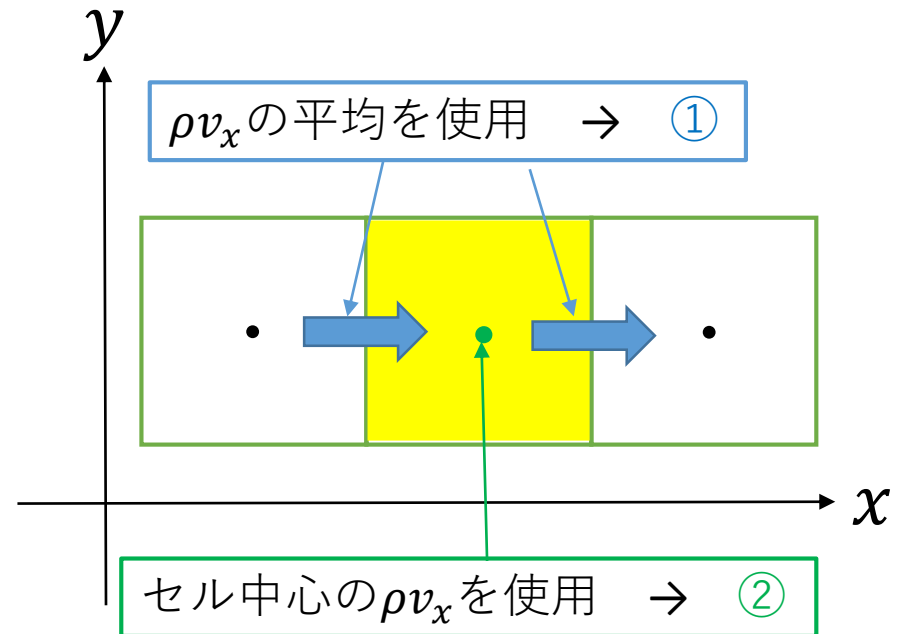
$t = 15.708$



コリオリ力の3種の評価法

3つの計算法

- ① Numerical Flux 型
- ② Cell Center 型
- ③ Half & Half 型



①と②の平均の ρv_x を使用

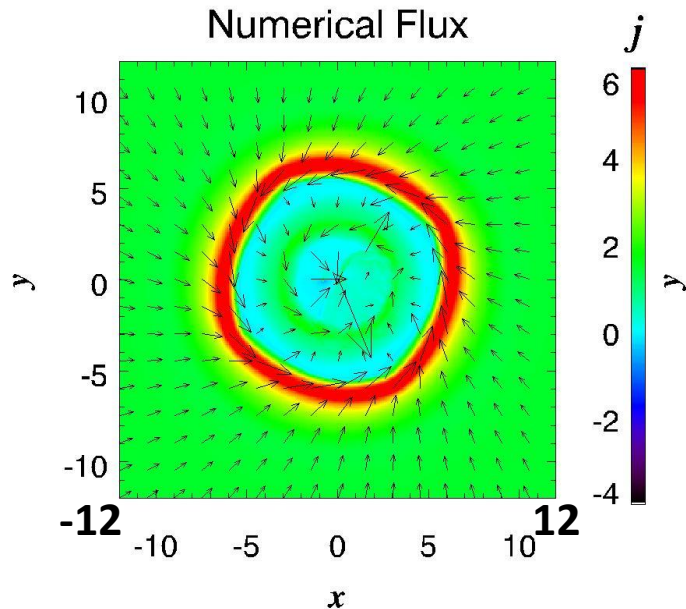


Half & Half

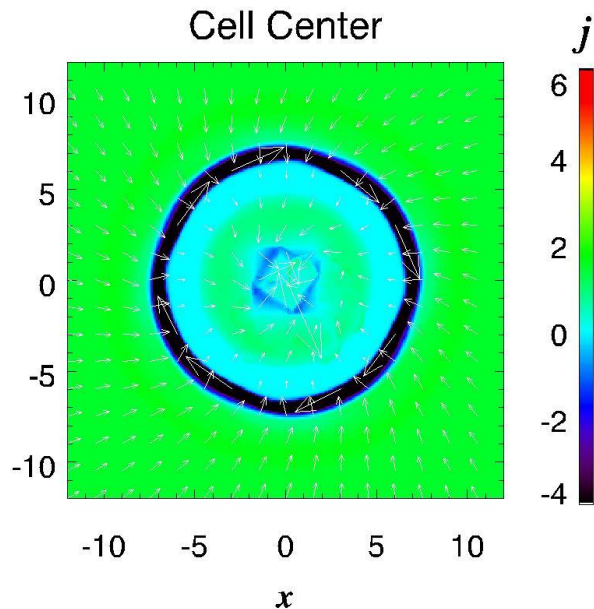
上の3つの計算法で
1. 比角運動量分布
2. 面密度分布
を比較

比角運動量分布 ($t = 9.3$)

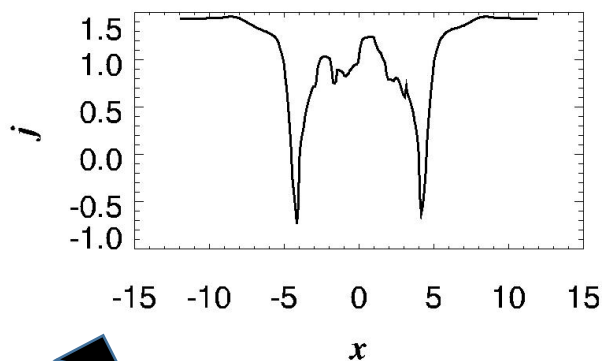
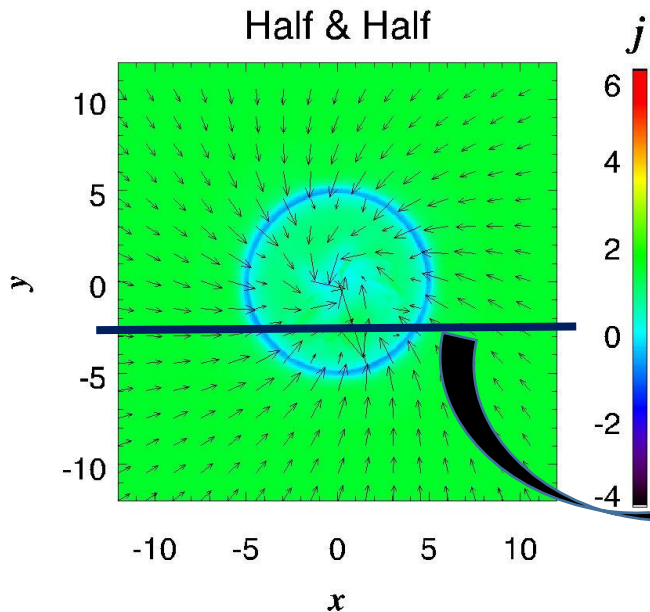
Numerical Flux



Cell Center



Half & Half

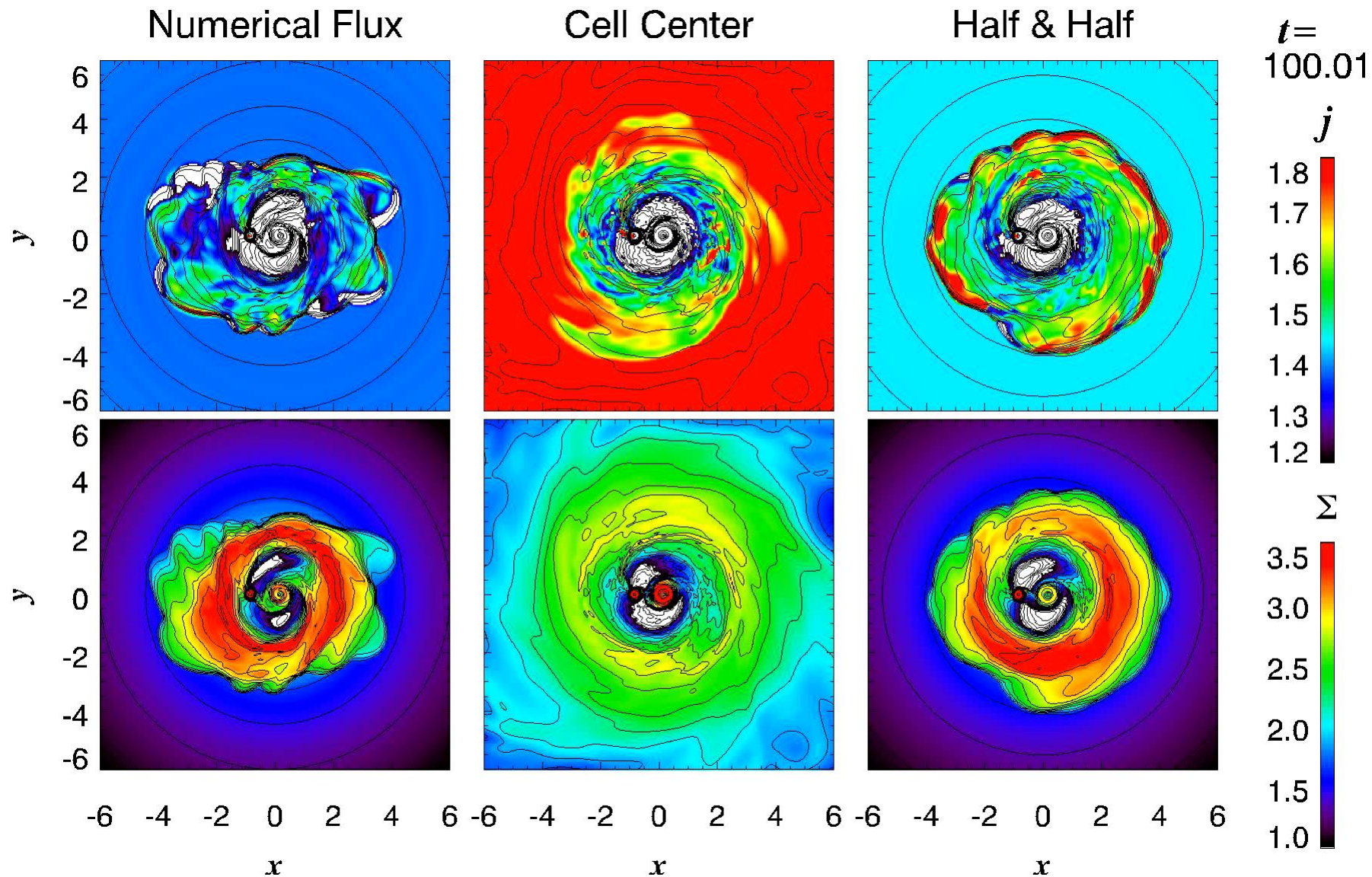


- $j_{\text{inf}} = 1.435$
 $c_s = 0.1$
 $q = 0.19$
 $\rho_0 = 10^{-3}$
 $256 \times 256 \times 128$

- SFUMATO 使用
- nested grid 使用(5段)

Half & Half型は、他の2つの方法と比較してかなり良くなっている。

比角運動量・面密度分布($100 < t < 150$)



シミュレーションモデル②

Disk 中の構造の違いは、降ってくるガスの違いに依存するか？

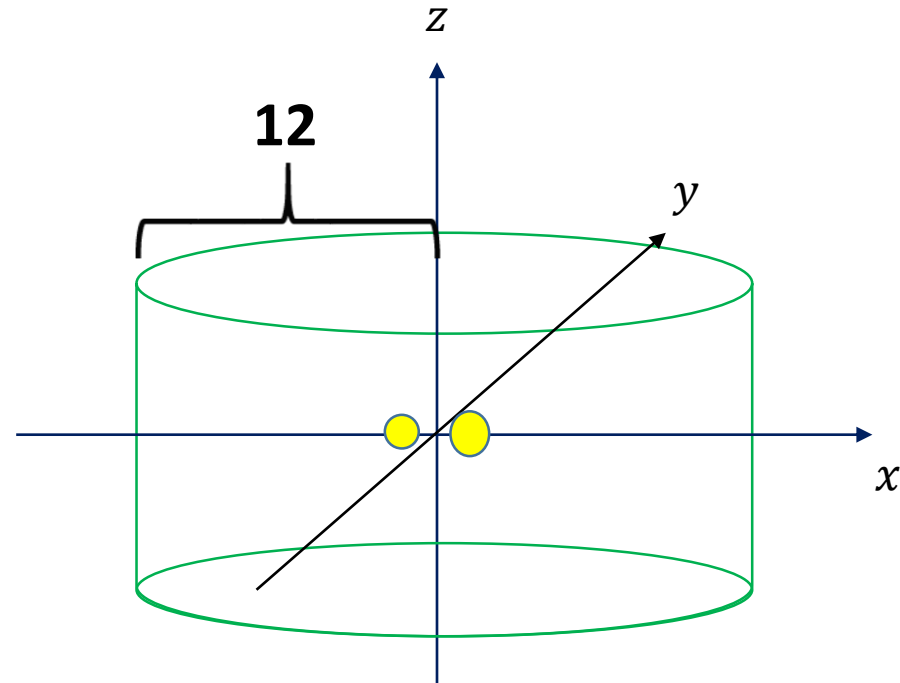
$$\rho_0 = 100 \times \tanh(r_c - 4.0) \times \frac{1}{2} \times \exp \left[\left\{ \frac{1}{(r_c^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_c} \right\} \frac{1}{c_s^2} \right]$$

$$v_x = v_z = 0$$

$$j_{\text{inf}} = \frac{r_c^3}{(r_c^2 + z^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$q = 0.944444$$

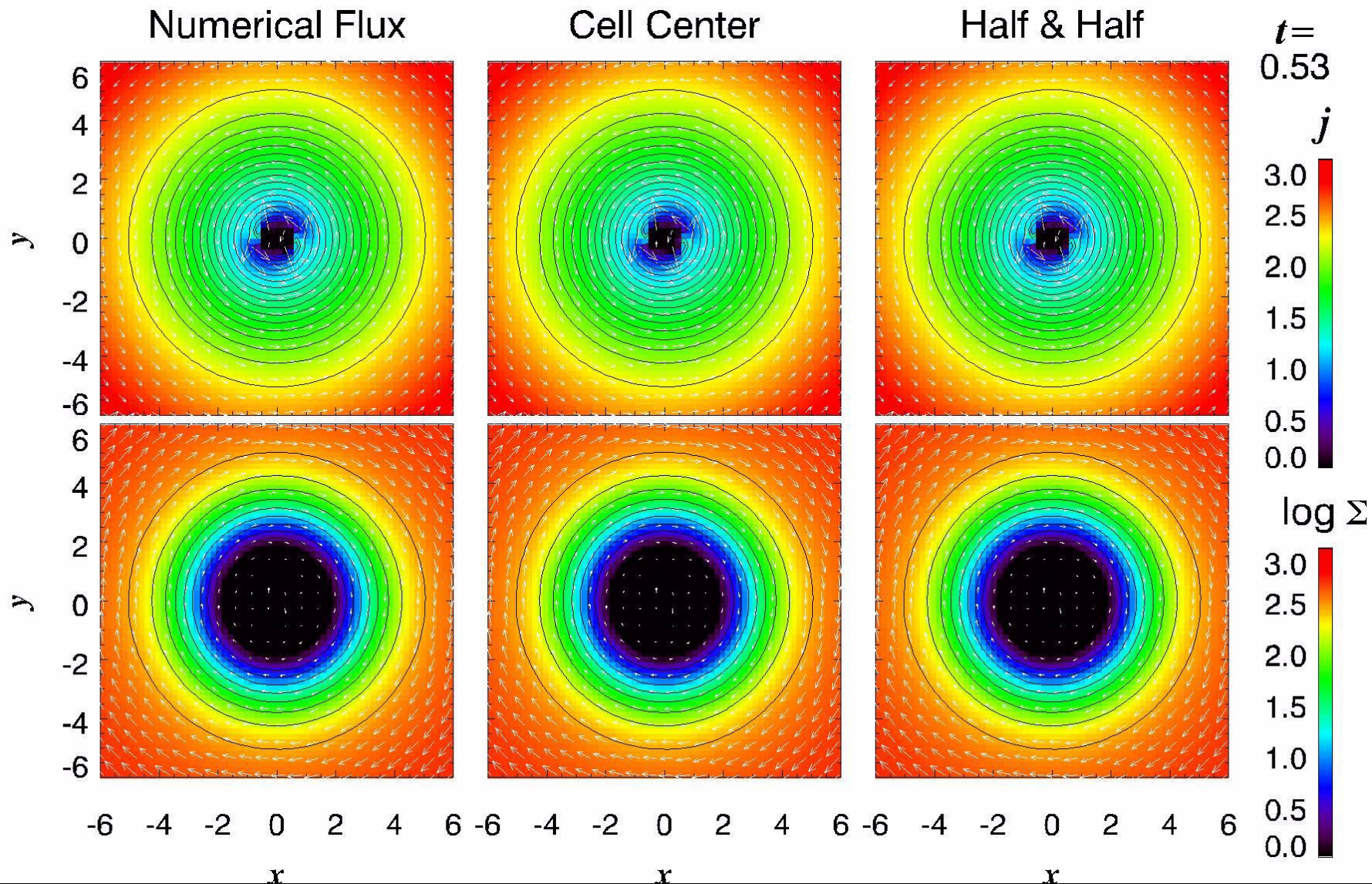
$$c_s = 0.1$$



初期にガスが連星周囲をKepler回転しているシミュレーションだとどうなるか？

比角運動量・面密度分布($0.5 < t < 130$)

$64 \times 64 \times 32$



考察(なぜHalf & Halfが良い?)

慣性系での運動量が保存

コリオリ力の導出

回転軸 = z軸、つまり、 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$

1. 慣性系 (x, y, z) と回転系 (x', y', z) の関係

$$\begin{array}{l} \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ \quad = x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'} + z'\mathbf{e}_{z'} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{e}_{x'} = \cos\Omega t \mathbf{e}_x + \sin\Omega t \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y'} = -\sin\Omega t \mathbf{e}_x + \cos\Omega t \mathbf{e}_y \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{e}}_{x'} = \Omega \mathbf{e}_{y'} \\ \dot{\mathbf{e}}_{y'} = -\Omega \mathbf{e}_{x'} \end{array}$$

2. 慣性系の速度 (u_x, u_y, u_z) と回転系の速度 (v_x, v_y, v_z) の関係 (ただし、 $u_z = v_z$)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \\ &= (v_x - \Omega y') \mathbf{e}_{x'} + (v_y + \Omega x') \mathbf{e}_{y'} + v_z \mathbf{e}_{z'} \end{aligned}$$

3. 連続の式と運動方程式 (変形する基となる式)

$$\text{連続の式: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P \mathbf{I}) = \rho \mathbf{g}$$

4. 運動方程式に $\mathbf{e}_{x'}$ をかけて、内積を求める

$$\mathbf{e}_{x'} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P \mathbf{I}) \right] = \rho g_{x'}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \\ &= (v_x - \Omega y') \mathbf{e}_{x'} + (v_y + \Omega x') \mathbf{e}_{y'} + v_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

→ $\frac{\partial}{\partial t} [\rho (\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{u})] + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} (\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{u}) + P \mathbf{e}_{x'}] = \rho g_{x'} + \rho \Omega (\mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{u})$
時間微分から出現

→ $\frac{\partial}{\partial t} [\rho (v_x - \Omega y')] + \frac{\partial}{\partial x'} [\rho v_x (v_x - \Omega y') + P] + \frac{\partial}{\partial y'} [\rho v_y (v_x - \Omega y')] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho v_z (v_x - \Omega y')] = \rho [g_{x'} + \Omega (v_{y'} + \Omega x')] \quad \dots \textcircled{1}$

5. 回転系での連続の式の両辺に $\Omega y'$ をかけて、部分積分

$$\Omega y' \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y'} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = 0$$

→ $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega y') + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho v_x \Omega y') + \frac{\partial}{\partial y'} (\rho v_y \Omega y') + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z \Omega y') = \rho \Omega v_{y'} \quad \dots \textcircled{2}$
空間微分から出現

6. ① + ② から、解くべき x 方向の流体力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho v_x v_x + P) + \frac{\partial}{\partial y'} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_x) = \rho g_{x'} + \rho \Omega (v_{y'} + \Omega x') + \rho \Omega v_{y'}$$

まとめ

- 比角運動量分布から、Numerical Flux 型やCell Center 型よりもHalf & Half 型の方が、かなり良い精度でガスを落下させることができる
- 2つ目のシミュレーションにおいて、Numerical Flux 型では密度が激しく振動する一方、Half & Half 型では、かなり安定したシミュレーションとなる(低解像度では)
- 回転座標系で衝撃波が発生するシミュレーションでは、コリオリ力はHalf & Half 型を使用したほうが良い可能性がある。