

高度な N 体シミュレーション法

押野翔一

2013/1/23

目次

- ▶ 様々な N 体シミュレーション
- ▶ 高精度時間積分法
- ▶ タイムステップの方法
- ▶ 相互作用の工夫

様々なN体シミュレーション

惑星形成

手法：エルミート法 + GRAPE-6(or GRAPE-DR)

微惑星の衝突を扱うので高精度積分法が必要。また、粒子数も必要なため GRAPE を使用する。

土星環シミュレーション

手法：local shearing box + リープフロッグ法 + GRAPE-7

様々なN体シミュレーション

銀河形成

手法：ツリー法 (恒星、ダークマター) + SPH 法 (ガス) + GRAPE-7 (or 並列計算)

銀河のシミュレーションを行う場合、恒星だけでなくダークマターからの重力も計算する必要がある。

そのため、必要となる粒子数は非常に多くなる。これらのシミュレーションでは重力の取り扱いにツリー法という手法を用いている。

銀河中心にある SMBH 周りの恒星運動を計算するには高精度な計算が必要。

構造形成

手法：TreePM 法 + 並列計算

ダークマター粒子の初期揺らぎから大規模構造が形成される。最近の研究では1兆個のダークマター粒子が必要となるため重力を直接扱うと計算が破綻する。

様々なN体シミュレーション

計算したい対象によって異なる手法を用いることで大きな粒子数や長時間の計算が可能となる

- ▶ 数値積分法
- ▶ 時間刻み
- ▶ 重力計算
- ▶ ハミルトニアン取り扱い

上記の手法を組み合わせる適切なN体シミュレーション法を使用している

高精度時間積分法

粒子軌道を正確に計算する必要がある時、タイムステップを短くしていくとその分計算量が増加してしまう。そのため、高次の次数を使った積分法が必要となってくる。

- ▶ 高次シンプレクティック積分法
- ▶ エルミート法

高次シンプレクティック積分法

Yoshida 1990 参照

惑星系の長期安定性などを計算するとき、リープフロッグ法 (2 次シンプレクティック積分法) では精度が足らなくなることがある。この時、より高次のシンプレクティック積分法が使用される。

1. 長時間積分ではエネルギー誤差の増加が抑えられるシンプレクティック積分が有用。
2. プログラミングが簡単。4 次シンプレクティック法の場合、リープフロッグ積分を時間刻みを変えて 3 回呼ぶことで求めることが出来る

エルミート法

高精度の N 体シミュレーション法として広く使われている。
4 次エルミート法 (Makino 1991)

1. 加速度と加速度の 1 階微分を計算する。
2. 位置と速度の予測子を計算する。
3. 予測子から加速度と加速度の微分を計算する。
4. エルミート補間多項式から高次の展開係数を計算する。
5. 位置、速度の修正子を計算する。

エルミート法

加速度と加速度の1階微分(加加速度)の計算

$$a_i = - \sum_{j \neq i}^N G m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}$$

$$\dot{a}_i = - \sum_{j \neq i}^N G m_j \left[\frac{v_j - v_i}{|x_j - x_i|^3} - \frac{3((v_j - v_i) \cdot (x_j - x_i))(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|^5} \right]$$

加速度の1階微分のことを jerk と呼ぶ

エルミート法

予測子

$$x_p = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{a_0}{2} \Delta t^2 + \frac{\dot{a}_0}{6} \Delta t^3$$

$$v_p = v_0 + a_0 \Delta t + \frac{\dot{a}_0}{2} \Delta t^2$$

修正子

$$x_c = x_p + \frac{a_0^{(2)}}{24} \Delta t^4 + \frac{a_0^{(3)}}{120} \Delta t^5$$

$$v_c = v_p + \frac{a_0^{(2)}}{6} \Delta t^3 + \frac{a_0^{(3)}}{24} \Delta t^4$$

展開係数

$$a_0^{(2)} = \frac{-6(a_0 - a_1) - \Delta t(4\dot{a}_0 + 2\dot{a}_1)}{\Delta t^2}$$

$$a_0^{(3)} = \frac{12(a_0 - a_1) + 6\Delta t(\dot{a}_0 + \dot{a}_1)}{\Delta t^3}$$

エルミート法

6 次、8 次エルミート法 (Nitadori & Makino 2008)

- ▶ より高精度なエルミート法。
- ▶ 6 次は加速度の 2 階微分、8 次は 3 階微分まで使用する。
- ▶ 高次の積分法を使うことで、粒子の近接遭遇時にも長いタイムステップを使用できる。

タイムステップの工夫

- ▶ 共有時間刻み
- ▶ 可変時間刻み
- ▶ 独立時間刻み
- ▶ 階層時間刻み

共有時間刻み

- ▶ すべての粒子のタイムステップを同じだけ進める。
- ▶ 高精度積分法でも簡単に実装できる。
- ▶ 近接遭遇している粒子以外も小さいタイムステップにしなければならないので、衝突系では計算量が大きくなってしまう。

可変時間刻み

- ▶ 軌道の変化が大きいときのみ短いタイムステップを使用する。
- ▶
- ▶ 4 次エルミート法で用いられるアーセス公式

$$\Delta t = \sqrt{\frac{|a||a^{(2)}| + |\dot{a}|^2}{|\dot{a}||a^{(3)}| + |a^{(2)}|^2}}$$

独立時間刻み

ここの粒子をそれぞれ異なるタイムステップで積分していく。

- ▶ 近接遭遇している粒子のみを短いタイムステップで計算する。
- ▶ 軌道の変化が大きい粒子は短いタイムステップで、変化が小さい粒子は大きいタイムステップで計算する。
- ▶ 予測子修正子法と組み合わせた場合、予測子の計算量が大きくなってしまう。

階層時間刻み

タイムステップの大きさを 2^n とする。

- ▶ 同時刻に積分する粒子が出てくるため、その分計算量を減らせる。
- ▶ タイムステップの加算での丸め誤差がなくなる。

相互作用の工夫

N 体シミュレーションにおいて最も時間がかかるのは粒子間相互作用の計算である。そのためこれまで様々な相互作用計算を軽くする手法が開発されてきた。

- ▶ ツリー法
- ▶ TreePM 法
- ▶ PPPT 法

ツリー法

Barnes & Hut 1986

- ▶ 重力相互作用演算を $O(N \log N)$ にできる。
- ▶ 遠方の粒子からの重力をまとめて計算することで演算量を抑えている。
- ▶ プログラミングが容易なので銀河形成などで広く使われている。

TreePM 法

$$F = F_{PP} + F_{PM}$$

現在、宇宙論的 N 体シミュレーションで用いられている方法。粒子数をも最も多く扱える。空間をメッシュで区切り、遠方のメッシュからの重力は FFT を用いて計算し、近傍のメッシュからの重力はメッシュ内の粒子をツリー法を用いて計算する。

PPPT 法

これまで見てきた相互作用の工夫は主に無衝突系で用いられてきた。なぜなら、これらの手法と衝突系において重要となる近接遭遇の取り扱いを両立させるのが難しいためである。

ここで紹介する PPPT 法は異なる積分法を組み合わせることで近接遭遇を正確に計算し、なおかつ粒子数の増加にも対応できる手法である。

まとめ

- ▶ 衝突系シミュレーションでは高精度時間積分法を用いることでタイムステップが小さくなることを防ぐ。
- ▶ 独立時間刻みを用いることで近接遭遇している粒子以外のタイムステップは小さくしなくてすむ。
- ▶ 相互作用を工夫することで、N体シミュレーションで最も計算に時間がかかる重力計算を軽くしている。

参考

- ▶ GADGET - 2 : 銀河形成や構造形成に用いられている。
(<http://www.gadgetcode.org/>)
- ▶ REBOUND : 惑星形成、リングシミュレーション用。
(<https://github.com/hannorein/rebound>)
- ▶ Mercury6 : 惑星形成に用いられている。
(<http://www.arm.ac.uk/jec/>)